MATRIZEN, INVERSES UND DARSTELLUNGEN

Wir machen uns mit weiteren grundlegenden Eigenschaften von linearen Abbildungen vertraut.

[P12] *Kreuzprodukt und Drehungen*
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Kreuzprodukt gedrehter Vektoren, $(D\vec{a}) \times (D\vec{b})$, gleich dem gedrehten Kreuzprodukt der ursprünglichen Vektoren ist,

$$D(\vec{a} \times \vec{b}) = (D\vec{a}) \times (D\vec{b}) .$$

Zeigen Sie dies explizit für die Drehung

$$D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

[P13] *Minoren und Inverses*
Betrachten Sie die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Bearbeiten Sie diese Aufgabe ausschließlich aus dem Kopf, ohne in Ihre Unterlagen zu sehen. Damit können Sie überprüfen, ob Sie die entsprechenden Teile der Vorlesung verstanden haben.

(a) Was ist die Determinante der Matrix M?

(b) Geben Sie die Matrix N an, die in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte $(-1)^{i+j}$ mal den Minor ${m^j}_i$ enthält. Der Minor ${m^j}_i$ der Matrix M ist die Determinante der Untermatrix, die durch Streichen der Zeile j und der Spalte i entsteht. *Hinweis*: Wiederholen Sie die Begriffe Minor, Kofaktor und Adjunkte aus der Vorlesung. Sie sollten sehen, dass N gerade die Adjunkte von M ist.

(c) Berechnen Sie NM und zeigen Sie $N = M^{-1} \det M$.

(d) Zeigen Sie für beliebige $n \times n$ Matrizen L, dass $(L^\top)^{-1} = (L^{-1})^\top$ ist.

[P14] *Spieglein Spieglein an der Wand*
vertauschst Du wirklich rechte und linke Hand?

[P15] *Komplexe Eigenwerte reeller Matrizen*
Betrachten Sie eine reelle 2×2 Matrix D. Es sei einer der Eigenwerte komplex, es gelte also

$$Dw = \lambda w \quad \text{mit} \quad \lambda = \Re(\lambda) + \mathrm{i}\Im(\lambda) \tag{1}$$

mit $\Im(\lambda) \neq 0$. Der Eigenwert λ lässt sich also als $\lambda = r(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$ schreiben (warum?). Machen Sie für den Eigenvektor w den Ansatz $w = u + \mathrm{i}v$ und trennen Sie in (1) nach Real- und Imaginärteil. Setzen Sie $v = e_1$ und $u = e_2$. Erschließen Sie mit Ihrem Resultat, was die Bedeutung eines komplexen Eigenwertes einer reellen Matrix ist.